Modeling with Mixed Frequency Variables: A Review of Recently Extended Methods in Time Series Econometrics

Naser Khiabani[1] | Naser.khiabani@atu.ac.ir
Fateme Rajabi[2] | Fateme.rajabi@atu.ac.ir

Abstract Recent theoretical econometric studies have focused on mixed frequency data. These studies are of great importance since they emphasize the role of information in economic modeling. In the current Time Series approach, temporal aggregation is often turned to a period of identical alternation; however, such aggregation leads to information loss in higher-frequency data. The mixed frequency studies provide a way to avoid the need for such temporal aggregation. In particular, the main result of this branch of econometric studies is to improve explanatory power, prediction, and efficiency in time series modeling with mixed frequency data. Accordingly, this paper attempts to specify the developments and shortcomings of this new branch of econometrics by reviewing the extant literature.

Keywords: Mixed Frequency Data, Temporal Aggregation, Time Series, Efficiency, MIDAS Regression.

JEL Classification: C12, C32.

The Journal of PLANNING & BUDGETING
Vol. 24 | No. 2 | Summer 2019 | PP 3-30
Indexed In ISC | ISSN: 2251-9092

1. Associate Professor, Faculty of Economics, Allameh Tabataba'i University, Tehran. Iran (Corresponding Author).
2. Ph.D. Student of Economics, Allameh Tabataba'i University, Tehran. Iran.

مدلسازی با متغیرهای دوره تناوبی مختلط: مروری بر روش‌های گسترش‌یافته اخیر در اقتصادسنجی سری‌های زمانی*

ناصر خیابانی
Naser.khiabani@atu.ac.ir
دانشیار دانشکده اقتصاد دانشگاه علامه طباطبایی
(نویسنده مسئول).

فاطمه رجبی
Fateme.rajabi@atu.ac.ir
دانشجوی دکتری رشته اقتصاد دانشگاه علامه طباطبایی.

نوع مقاله: پژوهشی

دریافت: ۱۳۹۸/۱۰/۱۵ | پذیرش: ۱۳۹۸/۱۲/۲۷

فصلنامه علمی - پژوهشی
برنامه‌ریزی و بودجه
شاپا (چاپی) ۹۰۹۲-۲۲۵۱
سال بیست و چهارم | شماره ۲ | تابستان ۱۳۹۸ | ص ص ۳۰-۳
نمایه در ISC

چکیده: پژوهش‌های اقتصادسنجی نظری جدید بر این واقعیت متمرکز هستند که دوره تناوبی متفاوتی در سری‌های زمانی وجود دارند. این گروه از پژوهش‌ها به واسطه این‌که بر نقش اطلاعات در مدلسازی‌های اقتصادی تاکید می‌کنند، اهمیت قابل‌توجهی دارند. در رویکرد رایج سری‌های زمانی، برای فراهم شدن امکان مدلسازی اقتصادی متغیرها با تواتر متفاوت، تجمیع زمانی را به یک دوره تناوب یکسان تبدیل می‌کنند. این کار یعنی، تجمیع زمانی متغیرهایی با دوره تناوب متفاوت به از بین رفتن اطلاعات موجود در سری زمانی با تواتر بالاتر منجر می‌شود. پژوهش‌های دوره تناوب مختلط با ارائه راهکاری در جهت الگوسازی با متغیرهای دوره تناوب متفاوت، نیاز به تجمیع زمانی را در مدلسازی مرتفع می‌کنند. به‌ویژه این‌که نتیجه اصلی این شاخه از پژوهش‌های اقتصادی قدرت توضیح‌دهندگی بیش‌تر، پیش‌بینی بهتر، و کارایی بیش‌تر در الگوهای مبتنی بر سری‌های زمانی با تواتر متفاوت است. از این‌رو، تلاش می‌شود که با مروری بر پژوهش‌های پیشین پیشرفت‌ها و کاستی‌های شاخه جدید اقتصادسنجی شناخته شود.

کلیدواژه‌ها: داده‌های دوره تناوبی مختلط، تجمیع زمانی، سری‌های زمانی، کارایی، رگرسیون MIDAS.

طبقه‌بندی JEL: C12 ,C32.

---

* مقاله مستخرج از رساله دکتری دانشجو به راهنمایی دکتر ناصر خیابانی در دانشگاه علامه طباطبایی است.

مقدمه

در مدلسازی‌های اقتصادی تلاش می‌شود که با کمک روش‌های اقتصادسنجی و با استفاده از اطلاعات موجود در سری‌های زمانی اقتصادی، به تحلیل وضع موجود و پیش‌بینی آینده اقتصاد پرداخته شود، تا از این راه به تصمیم‌گیری عوامل اقتصادی و سیاستگذاری کمک شود. این در حالی است که سری‌های زمانی با دوره تناوبی متفاوت در دسترس هستند. برای مثال، شاخص‌های قیمت و نرخ بیکاری به صورت ماهانه منتشر می‌شوند، تولید ناخالص داخلی و تولید صنعتی به صورت فصلی گزارش می‌شوند، داده‌های بازار سهام به صورت روزانه در دسترس است، و نرخ ارز و قیمت نفت به صورت ساعتی در اختیار است. در چنین شرایطی، برای بررسی یک پدیده اقتصادی، برداری از متغیرهایی با دوره تناوبی متفاوت وجود دارد. به همین دلیل، پژوهشگران اقتصادسنجی نظری باید رویکرد مناسبی برای مواجهه با این واقعیت ـ دوره تناوبی متفاوت متغیرها ـ ارائه کنند. تا چندی پیش، رویکرد رایج در مواجهه با این مسئله، تجمیع زمانی سری‌های زمانی با دوره تناوبی بالاتر و تبدیل همه سری‌های موجود در بردار متغیر به یک دوره تناوبی یکسان بود. آممیا و وو[1] (۱۹۷۲)، مارسلینو[2] (۱۹۹۹)، لوتکپول[3] (۱۹۸۴)، و بریتونگ و سوانسون[4] (۲۰۰۲)، نشان می‌دهند که تجمیع زمانی متغیرهای دوره تناوبی بالاتر به دوره تناوبی کم‌تر به از دست رفتن اطلاعات موجود در سری زمانی با دوره تناوبی بالاتر منجر می‌شود و در نتیجه، مشکلاتی مانند ریشه‌های نادرست مشخص‌شده، تغییر مرتبه انباشتگی و هم‌انباشتگی، علیت آنی جعلی، تورش تخمین، نادیده گرفتن حرکات چرخه‌ای، و کاهش کارایی را بروز می‌دهد. بنابراین، مدل‌های سری‌های زمانی گسترش‌یافته با این فرض، یعنی دوره تناوبی یکسان بردار متغیرها، از این مسئله آسیب‌پذیر هستند.

پژوهشگران اقتصادسنجی با از بین رفتن اطلاعات با تجمیع زمانی، به طراحی روشی سوق داده می‌شوند که امکان استفاده از اطلاعات موجود را در سری‌های زمانی دوره تناوبی بالاتر فراهم می‌کند. به عنوان پیشگام، قیسلز و همکاران[5] (۲۰۰۴)، با معرفی رگرسیون MIDAS[6] که در واقع شکلی از رگرسیون با وقفه‌های توزیعی است، امکان اجرای رگرسیون را با متغیرهای دوره تناوب مختلط فراهم می‌کنند. در این رویکرد، از متغیر دوره تناوبی بالاتر به عنوان رگرسور استفاده می‌شود و به‌جای تجمیع

1. Amemiya & Wu
2. Marcellino
3. Lütkepohl
4. Breitung & Swanson
5. Ghysels *et al*.
6. Mixed Data Sampling (MIDAS) Regression

زمانی با وزن معین به برآورد وزن‌ها می‌پردازد. در مقایسه، نتایج قیسلز و همکاران (۲۰۰۴) نسبت به نتایج رگرسیون مبتنی بر متغیرهای تجمیع زمانی‌شده با وزن‌های معین[۱] به واسطه استفاده از اطلاعات کامل، پیش‌بینی دقیق‌تری خواهد داشت. قیسلز و همکاران (۲۰۰۶)، با استفاده از میانگین مجذور خطای (MSE)[۲] پیش‌بینی نشان می‌دهند که رگرسیون MIDAS کاراتر است. اگرچه رگرسیون MIDAS با مشکل ازدیاد فزاینده پارامتر[۳] مواجه است. در ادامه، برای رفع مسئله ازدیاد فزاینده پارامترها، آندرو و همکاران[۴] (۲۰۱۰)، قیسلز و همکاران (۲۰۰۵؛ ۲۰۰۶)، قیسلز و رایت[۵] (۲۰۰۹)، قیسلز و همکاران (۲۰۰۷)، و کلمنت و گالوا[۶] (۲۰۰۸)، به تکامل رویکرد رگرسیون MIDAS می‌پردازند.

فراهم‌سازی امکان ورود متغیرها با دوره تناوبی مختلط در رگرسیون، پژوهشگران اقتصادسنجی را به سمت گسترش مدلسازی‌های سنجی بر پایه متغیرهایی با دوره تناوبی مختلط هدایت می‌کند. از این‌رو، طیف وسیعی از پژوهش‌ها بر پایه رگرسیون‌های MIDAS به تکامل روش‌های اقتصادسنجی چندمتغیره رایج با متغیرهای دوره تناوبی مختلط از سرگرفته می‌شود. چنانچه قیسلز (۲۰۱۶)، به گسترش الگوی خودرگرسیون‌برداری (VAR)[۷] در متغیرهای دوره تناوبی مختلط می‌پردازد. در ادامه قیسلز و همکاران (۲۰۰۶)، چن و قیسلز[۸] (۲۰۱۱)، مارسلینو و شوماخر[۹] (۲۰۱۰)، کوزین و همکاران[۱۰] (۲۰۱۱)، اراکر و همکاران[۱۱] (۲۰۱۴)، فورونی و همکاران[۱۲] (۲۰۱۳)، اسکورفید و سونگ[۱۳] (۲۰۱۲)، گوتز و هیک[۱۴] (۲۰۱۴)، قیسلز و همکاران (۲۰۱۶)، و گوتز و همکاران[۱۵] (۲۰۱۶)، در حوزه متغیرهایی با مرتبه انباشتگی صفر، روش‌های چندمتغیره رایج را در سری‌های زمانی با دوره تناوبی یکسان گسترش می‌دهند.

---

۱. رویکرد رایج

2. Mean Squared Errors
3. Parameter Proliferation
4. Andreou *et al*.
5. Ghysels & Wright
6. Clements & Galvão
7. Vector Autoregressive Model
8. Chen & Ghysels
9. Marcellino & Schumacher
10. Kuzin *et al*.
11. Eraker *et al*.
12. Foroni *et al*.
13. Schorfheide & Song
14. Götz & Hecq
15. Götz *et al*.

در حوزه سری‌های زمانی انباشته از مرتبه یکم نیز پژوهشگران اقتصادسنجی با تاکید بر اهمیت نادیده‌گرفته شدن اطلاعات موجود در سری‌های زمانی با دوره تناوبی بالاترِ تجمیع زمانی‌شده، به بررسی اثر تجمیع زمانی بر روابط بلندمدت می‌پردازند. میلر[1] (۲۰۱۴)، با گسترش رگرسیون MIDAS برای متغیرهای هم‌انباشته، امکان وجود روندهای تصادفی مشترک را بررسی می‌کند. وی برای گریز از مسئله ازدیاد فزاینده پارامترها با استفاده از آلمون‌نمایی[2] دوپارامتری به تصریح صرفه‌جویانه CO-MIDAS می‌پردازد. گوتز و همکاران (۲۰۱۴)، مدل خودرگرسیون با وقفه‌های توزیعی را با متغیرهای دوره تناوبی مختلط MF-ADL برای سری‌های زمانی انباشته از مرتبه یک با دوره تناوبی متفاوت تعمیم می‌دهند. پژوهش‌ها در شاخه سری‌های زمانی انباشته از مرتبه یکم به روش‌های تک‌معادله محدود نمی‌شود و در این راستا گوتز و همکاران (۲۰۱۳)، در یک بردار متغیر با متغیرهای دوره تناوبی مختلط به تفکیک روندهای مشترک و چرخه‌های مشترک می‌پردازند. آن‌ها نشان می‌دهند که حتی اگر تجمیع زمانی متغیرها روندهای مشترک را تحت‌تاثیر قرار ندهد، چرخه‌های مشترک با تورش برآورد می‌شوند. در ادامه قیسلز و میلر[3] (۲۰۱۵)، به استخراج آزمون اثر جوهانسن[4] در بردار متغیرهای انباشته از مرتبه یکم با دوره تناوبی مختلط می‌پردازند. آن‌ها نشان می‌دهند با وجود آن‌که تجمیع زمانی به تورش در تخمین بردار هم‌انباشتگی منجر نمی‌شود، اما تحریف اندازهٔ به‌وجودآمده از تجمیع زمانی، توزیع آماره را تحت تاثیر قرار می‌دهد و استنباط آماری را تحریف می‌کند. بنابراین، به دلیل تحریف اندازه توزیع به‌دست‌آمده توسط جوهانسن (۱۹۸۸)، ارزشیابی معناداری بردار هم‌انباشتگی معتبر نیست. در ادامه میلر (۲۰۱۴؛ ۲۰۱۶؛ ۲۰۱۹)، گوتز و همکاران (۲۰۱۴)، چمبرز[5] (۲۰۱۹)، و گوتز و هیک (۲۰۱۹)، به گسترش پژوهش‌ها در حوزه هم‌انباشتگی با متغیرهای دوره تناوبی مختلط می‌پردازند.

در مقدمه نشان داده می‌شود که گسترش این شاخه جدید در اقتصادسنجی سرهای زمانی به بهبود مدلسازی، پیش‌بینی، و افزایش کارایی کمک شایانی می‌کند. از آن‌جا که این شاخه از پژوهش‌های اقتصادسنجی به‌تازگی و به‌سرعت پیش می‌رود، با وجود قابلیت بالایی که این پژوهش‌ها در اقتصادسنجی فراهم می‌کنند، هنوز در ادبیات اقتصادی فارسی‌زبان جایی باز نکرده است. در این پژوهش، با مرور مسیر گسترش روش‌های اقتصادسنجی با متغیرهای دوره تناوبی مختلط به این

1. Miller
2. Exponential Almon
3. Ghysels & Miller
4. Trace Test Johansen
5. Chambers

شکاف پاسخ می‌دهیم. علاوه بر این، پژوهش حاضر به خواننده کمک می‌کند که با دنبال کردن سیر گسترش مدل‌های دوره تناوب مختلط و با شناخت قابلیت‌ها و معایب هر الگو، روش مناسبی برای مدلسازی اقتصادی انتخاب کند.

در ادامه، ویژگی‌های اصلی هر یک از شاخه‌ها توصیف می‌شود، مزایا و معایب آن‌ها مطرح می‌شود، و چگونگی برطرف کردن نقص‌ها توسط رشته‌پژوهش‌های بعدی مورد بحث قرار می‌گیرد. در بخش یکم، رگرسیون MIDAS و سایر گسترش‌های رگرسیون‌های تک‌معادله‌ای با متغیرهای تناوب مختلط با مرتبه انباشتگی صفر توصیف می‌شود. بخش دوم به گسترش‌های چندمتغیره دوره تناوبی مختلط با متغیرهای مانا اختصاص دارد. روش‌های تک‌معادله‌ای با متغیرهای دوره تناوب مختلط انباشته از مرتبه یکم در بخش سوم بحث می‌شوند. هم‌انباشتگی و سیستم‌های چندمتغیره با متغیرهای دوره تناوب مختلط انباشته از مرتبه یکم در بخش چهارم ارائه می‌شود. در بخش پنجم، پژوهش با ارائه بحث و نتیجه‌گیری پایان می‌پذیرد.

مبانی نظری پژوهش

رگرسیون MIDAS و گسترش‌های آن[1]

سری‌های زمانی اقتصادی با دوره تناوبی متفاوتی منتشر می‌شوند. برای مثال، تولید ناخالص داخلی به‌طور فصلی منتشر می‌شود، شاخص قیمت‌ها ماهانه، و نرخ ارز روزانه در دسترس است. در مدلسازی‌های اقتصادی، رویکرد رایج در مواجهه با این پدیده، تجمیع زمانی متغیر با دوره تناوبی بالاتر به دوره تناوبی پایین‌تر است. آشکارا در این رویکرد، تجمیع زمانی اطلاعات موجود در سری زمانی با دوره تناوبی بالاتر نادیده گرفته می‌شود و به همین دلیل، تورش در تخمین و تحریف توزیع

---

۱. نیاز به یادآوری است که ترتیب پژوهش‌ها در سیر مروری به لحاظ گسترش الگوهاست. اگرچه ممکن است سال انتشار مقاله‌ها به دلیل فرایند انتشار، این ترتیب را نشان ندهد. برای یافتن شاخص پیشگام بودن در هر شاخه از پژوهش‌ها، مسیر گسترش نسخه‌های Working Paper و رفرنس‌دهی پژوهش‌ها به یکدیگر ملاک قرار داده می‌شود. برای مثال، الگوی VAR اولین بار توسط قیسلز در سال ۲۰۱۲ به صورت Working Paper گسترش یافت، اما در سال ۲۰۱۶ به صورت مقاله منتشر شد. اما پژوهش‌هایی یافت می‌شود که به گسترش MF-VAR قیسلز می‌پردازند، ولی سال انتشار آن‌ها پیش از ۲۰۱۶ است. برای مثال، می‌توان به فرونی و همکاران (۲۰۱۳) اشاره کرد.

را به‌وجود می‌آورد. نگرانی اثرهای از بین رفتن اطلاعات به دلیل تجمیع زمانی را می‌توان در آممیا و وو (۱۹۷۲)، مارسلینو (۱۹۹۹)، لوتکپول (۱۹۸۴)، و بریتونگ و سوانسون (۲۰۰۲) پیگیری کرد. آممیا و وو (۱۹۷۲)، در یک مدل VAR به بررسی اثر تجمیع زمانی می‌پردازند و با استفاده از معیار MSE نشان می‌دهند که پیش‌بینی با استفاده از داده‌هایی با دوره تناوبی بالاتر بهتر از داده‌هایی با دوره تناوبی پایین‌تر است.

مارسلینو (۱۹۹۹)، با بررسی ویژگی‌های آماری سری‌های زمانی، آنگاه که متغیرهای دوره تناوبی بالا تجمیع زمانی شوند، نشان می‌دهد که برخی ویژگی‌ها از جمله ریشه‌های مشخص‌شده، مرتبه انباشتگی و هم‌انباشتگی، و چرخه‌های مشترک موجود در یک بردار، متغیر انباشته را از مرتبه یکم مخدوش می‌کند. همچنین لوتکپول (۱۹۸۴)، در مدل VARMA[1] نشان می‌دهد که تجمیع زمانی، کارایی پیش‌بینی‌ها را تحت تاثیر قرار می‌دهد. بریتونگ و سوانسون (۲۰۰۲)، با بررسی مدل‌های چندمتغیره به این نتیجه می‌رسند که احتمال بروز پدیده علیت آنی جعلی[2] در سری‌های زمانی تجمیع زمانی‌شده محتمل است. به‌روشنی، نادیده گرفتن اطلاعات در مشاهده‌ها با دوره تناوبی بالاتر پیامدهایی همچون تورش در تخمین، تحریف در توزیع، و کاهش کارایی در پیش‌بینی در پی دارد. این موضوع الزام بازنگری در روش‌های سری‌های زمانی را با پیش‌فرض دوره تناوبی یکسان آشکار می‌کند. در این راستا، پژوهش‌هایی به منظور برطرف کردن یا کاستن این مشکلات صورت می‌گیرد که مدلسازی را با استفاده از متغیرهایی با دوره تناوبی مختلط میسر کند. به عنوان پیشگام در این مسیر قیسلز و همکاران (۲۰۰۴)[3]، رگرسیون MIDAS را معرفی می‌کنند که شکل خاصی از رگرسیون با وقفه‌های توزیعی است، به‌گونه‌ای که امکان استفاده از متغیرهایی با دوره تناوبی مختلط را ایجاد می‌کند. پژوهشگران رگرسیون MIDAS را به شکل رابطه (۱) تصریح می‌کنند:

$$y_t = \beta_0 + B\left(L^{\frac{1}{m}}\right) x_t^{(m)} + \varepsilon_t^{(m)} \qquad (۱)$$

که y_t متغیر تناوب پایین است و توسط متغیر تناوب بالای $x_t^{(m)}$ توضیح داده می‌شود. همچنین، ضریب چندجمله‌ای وقفه به شکل $B\left(L^{\frac{1}{m}}\right) = \sum_{j=0}^{jmax} B(j) L^{\frac{j}{m}}$ است که $L^{\frac{j}{m}}$ عملگر وقفه تناوب بالا یعنی $L^{\frac{i}{m}} x_t^{(m)} = x_{t-\frac{i}{m}}^{(m)}$ است. $jmax$ تعداد وقفه است که می‌تواند نامحدود باشد. همچنین، m نشان می‌دهد

1. Vector Autoregressive Moving Average
2. Spurious Instantaneous Causality
3. The MIDAS Touch: Mixed Data Sampling Regression

که هر متغیر تناوب بالا در طول هر یک دوره از تناوب پایین m بار مشاهده می‌شود و در نماد $x_{t-\frac{i}{m}}^{(m)}$ نشان‌دهنده $i \in \langle 0, m-1 \rangle$ امین بار مشاهده متغیر تناوب بالا درون دوره t ام است.[1] در واقع، ایده رگرسیون MIDAS قیسلز و همکاران (۲۰۰۴)، بسیار نزدیک به رگرسیون وقفه‌های توزیعی[2] است. ملاحظه می‌شود که وقفه‌های متغیر دوره تناوبی بالا، که در طول یک دوره تناوب پایین مشاهده می‌شوند، به عنوان رگرسور و متغیر توضیحی در رگرسیون وارد می‌شوند. در واقع، رویکرد رگرسیون MIDAS به‌جای این‌که با یک رویه تجمیع زمانی[3] ثابت و از پیش مشخص متغیر دوره تناوبی بالا را تجمیع زمانی کند، وزن‌ها را توسط رگرسیون تخمین می‌زند. به عبارت دقیق‌تر، چندجمله‌ای بودن وقفه $B\left(L^{\frac{1}{m}}\right) = \sum_{j=0}^{jmax} B(j) L^{\frac{j}{m}}$ را می‌توان به رویه تجمیع زمانی متغیر تناوب بالا تعبیر کرد که به‌جای استفاده از وزن‌های ثابت در رویه تجمیع زمانی[4]، ضرایب رگرسیون را که همان وزن‌ها هستند، تخمین می‌زند. آن‌ها نشان می‌دهند که برآوردگر رگرسیون MIDAS کاراتر است و پیش‌بینی بهتری دارد، چرا که ویژگی این نوع رگرسیون استفاده از پویایی‌های بسیار غنی‌تر داده‌های تناوب بالا به منظور پیش‌بینی متغیر تناوب پایین است. همان‌طور که قیسلز و همکاران (۲۰۰۶) نشان می‌دهند، استفاده از رگرسیون MIDAS به نتایج کاراتری[5] منتج می‌شود. آن‌ها برای اثبات ادعای خود بر اساس شبیه‌سازی مونت کارلو نشان می‌دهند که میانگین مجذور خطای (MSE) پیش‌بینی مدل‌های مبتنی بر متغیرهایی با دوره تناوبی مختلط کم‌تر از MSE مدل‌های سری زمانی مبتنی بر فرض یکسان بودن دوره تناوبی (با انجام تجمیع زمانی) است. اگرچه رگرسیون MIDAS با مشکل ازدیاد فزاینده پارامتر مواجه است. برای مثال، وقتی یک متغیر ماهانه در کنار یک متغیر سالانه رگرسیون شود، به‌جای یک پارامتر لازم است که دوازده پارامتر تخمین بخورد. به عبارتی دیگر، در این رویکرد یک مبادله[6] بین منفعت استفاده از اطلاعات بیش‌تر و هزینه وجود پارامترهای بیش‌تر برای تخمین وجود دارد.

قیسلز و همکاران (۲۰۰۷)، برای کاهش مسئله ازدیاد فزاینده پارامتر تلاش می‌کنند که ساختارهای وقفه مختلفی برای پارامتریزه کردن صرفه‌جویانه[7] رگرسیون ارائه دهند. در این راستا قیسلز و همکاران (۲۰۰۷)، پیشنهاد می‌کنند به‌جای این‌که ضرایب چندجمله‌ای وقفه $B\left(L^{\frac{1}{m}}\right)$ به‌طور

---

۱. برای مثال، وقتی متغیر دوره تناوبی پایین فصلی و متغیر دوره تناوبی بالا ماهانه است است.
2. Distributed Lag of Regressors
3. Temporal Aggregation Scheme
۴. برای مثال، متوسط ساده گرفتن که وزن‌های ثابت را لحاظ می‌کند.
5. Efficient
6. Trade-Off
7. Parameterize Parsimoniously

کامل در رگرسیون تخمین زده شود، از تصریح‌های متفاوتی برای این چندجمله‌ای استفاده شود که رویه تجمیع بتواند به اندازه کافی انعطاف‌پذیری ایجاد کند، اما تعداد پارامتر کم‌تری داشته باشد. یعنی به‌جای تخمین وزن‌ها در چندجمله‌ای $B\left(L^{\frac{1}{m}}\right)$، ضرایب این چندجمله‌ای با استفاده توابع چندجمله‌ای نمایی آلمون یا تابع بتا تصریح شود که با تعداد محدود پارامتر امکان ایجاد شکل وزنی بسیار انعطاف‌پذیر فراهم شود. قیسلز و همکاران (۲۰۰۷)، در نخستین حالت ضرایب چندجمله‌ای $B\left(L^{\frac{1}{m}}\right)$ در رگرسیون، MIDAS را با استفاده رویکرد آلمون‌نمایی به شکل رابطه (۲) تصریح می‌کنند.

$$B(k;\theta)=\frac{e^{\theta_1 k+\cdots+\theta_q k^q}}{\sum_{k=1}^{K} e^{\theta_1 k+\cdots+\theta_q k^q}} \qquad (۲)$$

که بردار θ شامل q پارامتر است. این فرم تابع به‌طور کامل انعطاف‌پذیر است و می‌تواند با تعداد q پارامتر محدود، شکل‌های متنوعی به خود بگیرد. برای مثال قیسلز و همکاران (۲۰۰۵)، آلمون‌نمایی دوپارامتری را استفاده می‌کنند. در مورد آلمون دوپارامتری، اگر $\theta_1=\theta_2=0$ باشد به وزن‌های برابر و رویه تجمیع زمانی متوسط‌گیری ساده می‌رسیم. در واقع، رگرسیون ساده‌ای که تاکنون با تجمیع زمانی، همه متغیرها را به یک دوره تناوبی مشترک تبدیل می‌کرد، وقتی مقدار تمام پارامترها صفر در نظرگرفته شود، به یک حالت خاص از این رویکرد تبدیل می‌شود. در ادامه قیسلز و همکاران (۲۰۰۷)، رویکرد تابع بتا را به مثابهٔ تصریح دومی برای ضرایب چندجمله‌ای $B\left(L^{\frac{1}{m}}\right)$ در رگرسیون MIDAS معرفی می‌کنند. به شکل رابطه (۳):

$$\mathrm{B}(k;\theta_1,\theta_2)=\frac{\not{f}\left(\frac{k}{K},\theta_1;\theta_2\right)}{\sum_{k=1}^{K}\not{f}\left(\frac{k}{K},\theta_1;\theta_2\right)} \qquad (۳)$$

که $\not{f}(x,a,b)=\frac{x^{a-1}(1-x)^{b-1}\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)}$ و $\Gamma(a)=\int_0^\infty e^{-x}x^{a-1}dx$ است. تابع بتا به‌طور کامل انعطاف‌پذیر است و می‌تواند با تغییر تنها دو پارامتر اشکال کاملاً متنوعی ایجاد کند. در مورد تابع بتا نیز می‌توان با $\theta_1=\theta_2=1$ به وزن‌های برابر و رویه تجمیع زمانی متوسط‌گیری ساده رسید. در رویکرد اولیه رگرسیون MIDAS وقفه‌های توزیعی واردشده در رگرسیون محدود نیستند و تعداد پارامترها به‌طور فزاینده با افزایش یک متغیر به رگرسیون افزایش می‌یابد. اما استفاده از هر یک از توابع آلمون‌نمایی و بتا این امکان را فراهم می‌کند که با تعداد پارامتر بسیار کم‌تر، رویه تجمیع بسیار منعطفی ایجاد کرد و به یک راه‌حل صرفه‌جویانه در پارامتر برای مشکل ازدیاد فزاینده پارامتر در رگرسیون MIDAS رسید.

آندرو و همکاران (۲۰۱۰)، به منظور مقایسه رگرسیون متغیرهای تناوب مختلط با رگرسیون سنتی[1]، رگرسیون با متغیرهای تناوب مختلط را به دوجمله تجزیه می‌کنند. یک جمله خطی که همان رگرسیون سنتی با وزن‌های مساوی است، به علاوه یک جمله غیرخطی که شامل تفاوت وزن‌های فرایند دوره تناوبی بالا با وزن‌های مساوی است. به عبارتی آندرو و همکاران (۲۰۱۰)، تعبیر جدیدی برای رگرسیون MIDAS ارائه می‌کنند و چندجمله‌ای وقفه‌های توزیعی را نوعی تجمیع وزنی در نظر می‌گیرند. با این استدلال که در رویکرد رایج، رویه تجمیع زمانی از وزن‌های مساوی[2] برای تمام تکرارهای متغیر تناوب بالا در یک دوره تناوب پایین استفاده می‌شود و به نوعی، برای تجمیع زمانی متوسط ساده گرفته می‌شود. در مقابل، در رگرسیون MIDAS وزن‌های متفاوت در نظرگرفته می‌شوند که همان ضرایب چندجمله‌ای وقفه هستند که تخمین می‌خورند. بنابراین، با این ایده میانگین شرطی رگرسیون MIDAS را به مجموع دوجمله تجزیه می‌کنند که شامل یک جمله تجمیع‌شده مبتنی بر وزن‌های مساوی و یک جمله غیرخطی است. این نگاه جدید به رگرسیون MIDAS ارتباطی بین رویکرد رگرسیون سنتی با متغیرهای دوره تناوبی یکسان و رویکرد جدید ـ یعنی دوره تناوبی مختلط ـ برقرار می‌کند.

همان‌طور که اشاره شد، مشکل عمده رگرسیون MIDAS مسئله ازدیاد فزاینده پارامتر است. به عبارت دقیق‌تر، زیاد شدن پارامترها ممکن است تا آن‌جا پیش رود که تعداد پارامترهای مورد نیاز برای تخمین بیش‌تر از مشاهده‌ها باشد و در عمل امکان تخمین وجود نداشته باشد. آندرو و همکاران (۲۰۱۰)، برای مواجه با مشکل یادشده، با این استدلال که تجمیع زمانی با وزن‌های یکسان به تمام مشاهده‌هایی که در تجمیع زمانی بکار می‌روند، یک وزن می‌دهند، درحالی که مشاهده‌های دورتر اهمیت کم‌تری دارند، وزن‌دهی متفاوتی برای تجمیع زمانی پیشنهاد می‌کنند. آن‌ها با این ابتکار سه رویه وزن‌دهی متفاوت را، که اهمیت مشاهده‌ها با دور شدن کاسته می‌شود و درجه کاهندگی متفاوت دارند، در کنار وزن‌دهی مساوی یا همان متوسط ساده پیشنهاد می‌دهند. به‌طوری که در هر یک از رویه‌های وزن‌دهی، با همان ایده قیسلز و همکاران (۲۰۰۷)، وزن‌ها با استفاده تابع چندجمله‌ای وقفه‌نمایی به یکدیگر مرتبط می‌شوند و درون رگرسیون تخمین می‌خورند. در ادامه، آنان به ارائه تخمین حداقل مربعات غیرخطی MIDAS و بررسی خواص مجانبی برآوردگرها می‌پردازند. نتایج آندرو و همکاران (۲۰۱۰)، کارایی بیش‌تر رگرسیون MIDAS را تایید می‌کنند. مزیت روش رگرسیون

۱. یعنی همه متغیرها با تجمیع زمانی به یک دوره تناوب مشترک تبدیل شوند.
2. Equal Weighting Scheme

MIDAS در این است که با ارائه چارچوب پارامتری ساده امکان استفاده از اطلاعات موجود را در متغیرهای دوره تناوب بالاتر فراهم می‌کند و همچنین برای مورد رگرسیون غیرخطی و چندمتغیره به‌راحتی تعمیم‌پذیر است. پیچیدگی آن نیز در این است که به دلیل ساختار چندجمله‌ای وقفه، ناگزیر به روش‌های تخمین غیرخطی است. قیسلز و همکاران (۲۰۰۷)، با تصریح رگرسیون MIDAS به وسیله تابع پله‌ای[1] امکان تخمین را با روش خطی فراهم می‌آورند. آن‌ها برای این منظور رگرسور $X_t(K,m) \equiv \sum_{j=1}^{K} x_{t-\frac{j}{m}}^{(m)}$ را به صورت جمع‌های جزئی[2] $x^{(m)}$ تناوب بالا در نظر می‌گیرند. در نهایت رگرسیون MIDAS عبارت است از:

$$y_t = \beta_0 + \sum_{i=1}^{M} \beta_i X_t(K_i, m) + \varepsilon_t \qquad (۴)$$

با M رگرسور پله‌ای که $K_1 < \cdots < K_M$ است. در پایان، اثر $x_t^{(m)}$ با $\sum_{i=1}^{M} \beta_i$ اندازه‌گیری می‌شود. ملاحظه می‌شود که الگوی وقفه‌های توزیعی با تعدادی از توابع پله‌ای گسسته تقریب می‌شود که البته از لحاظ اصل صرفه‌جویی آسیب‌پذیر است. طیف وسیعی از پژوهش‌ها بر پایه رگرسیون‌های MIDAS به تکامل روش‌های اقتصادسنجی رایج و کاربردهای تجربی آن‌ها می‌پردازند که می‌توان به ودارس و راکاسکاس[3] (۲۰۱۰)، فورسبرگ و قیسلز[4] (۲۰۰۷)، رودریگز و پوگیونی[5] (۲۰۱۰)، بایی و همکاران[6] (۲۰۱۳)، قیسلز و رایت (۲۰۰۹)، پتنوزو و همکاران[7] (۲۰۱۶)، زادروزنی[8] (۲۰۱۶)، کلمنت و گالوا (۲۰۰۸)، کیان[9] (۲۰۱۶)، گوتز و هازنبرگر[10] (۲۰۱۸)، و قیسلز و همکاران (۲۰۱۸)، اشاره کرد.

الگوهای چندمتغیره مانا با متغیرهای دوره تناوبی مختلط

امکان تخمین مدل‌های رگرسیونی با وجود متغیرهایی با تواتر متفاوت و بهبود آشکار نتایج در رگرسیون‌های MIDAS برای پژوهشگران این انگیزه را ایجاد می‌کند که در مدل‌های چندمتغیره

1. Step Functions
2. Partial Sums of High Frequency
3. Kvedaras & Račkauskas
4. Forsberg & Ghysels
5. Rodriguez & Puggioni
6. Bai et al.
7. Pettenuzzo *et al*.
8. Zadrozny
9. Qian
10. Götz & Hauzenberger

نیز به دنبال گسترش روش‌هایی با متغیرهای تناوب مختلط باشند. در مدل‌های چندمتغیره، مزیت الگوهای خودرگرسیون در این است که برخلاف مدل تک‌معادله‌ای، که متغیرهای تناوب بالا به عنوان رگرسور وارد معادله می‌شوند و توضیح‌دهنده برای متغیر تناوب پایین هستند، در الگوی VAR تمام متغیرها به شکل درون‌زا وارد الگو می‌شوند و بازخورد تمام متغیرها بر یکدیگر لحاظ می‌شود. در این راستا، قیسلز (۲۰۱۶)، مدل خودرگرسیون‌برداری را با متغیرهای دوره تناوبی مختلط MF-VAR گسترش می‌دهد. ایده کار قیسلز (۲۰۱۶)، از رگرسیون MIDAS است، چنانچه الگوی MF-VAR را به شکل الگوی (۵) معرفی می‌کند:

$$\begin{bmatrix} x_H(\tau_L,1) \\ \vdots \\ x_H(\tau_L,m) \\ x_L(\tau_L) \end{bmatrix} = A_0 + \sum_{j=1}^{p} A_j \begin{bmatrix} x_H(\tau_{L-j},1) \\ \vdots \\ x_H(\tau_{L-j},m) \\ x_L(\tau_{L-j}) \end{bmatrix} + \underline{\varepsilon}(\tau_L) \qquad (۵)$$

که الگوی MF-VAR(p) است و در آن x_L نشان‌دهنده بردار متغیر تناوب پایین با ابعاد K_L است و X_H بردار متغیر تناوب بالا را نشان می‌دهد و دارای ابعاد K_H است. همچنین، m تعداد مشاهده متغیر تناوب بالا در هر دوره مشاهده متغیر تناوب پایین است. بردار متغیرها در الگو به شکل بردار پشته‌شده[1] وارد می‌شود. به این ترتیب که ابتدا متغیر تناوب بالا و پس از آن متغیر تناوب پایین در بردار قرار می‌گیرد. با این توضیح که هر m تکرار متغیر تناوب بالا، یک درایه بردار متغیر مورد نظر را در الگوی MF-VAR شکل می‌دهد. به‌طور مشخص، $x_H(\tau_L,1)$ نخستین تکرار متغیر تناوب بالا درون یک دوره از تناوب پایین است و $x_H(\tau_L,m)$ نیز mامین تکرار متغیر تناوب بالا درون همان دوره از تناوب پایین است. با این تعریف، بردار متغیر الگوی MF-VAR دارای ابعاد $K_L + (m \times K_H)$ است. بنابراین، آخرین معادله الگوی MF-VAR به شکل معادله (۶) خواهد بود:

$$\begin{aligned} x_L(\tau_L) = A_0^{m+1,1} + \textstyle\sum_{j=1}^{p} A_j^{m+1,m+1} x_L(\tau_L - j) + \\ \textstyle\sum_{j=1}^{p}\sum_{k=1}^{m} A_j^{m+1,k} x_H(\tau_L - j, k) + \underline{\varepsilon}(\tau_L)^{m+1,1} \end{aligned} \qquad (۶)$$

که ملاحظه می‌شود، شکلی از مدل رگرسیون MIDAS است. همان‌طور که پیش‌تر اشاره شد، مشکل بزرگ رگرسیون MIDAS و تعمیم‌های آن، ازدیاد فزاینده پارامتر است. قیسلز (۲۰۱۶)، برای مواجهه با این مشکل استدلال می‌کند که می‌توان متغیرهای تناوب بالا را به شکل الگوی AR(1)

1. Stacked in a Vector

فرض کرد و بنابراین، در ماتریس ضرایب A بخش مربوط به ضرایب خودرگرسیونی متغیر تناوب بالا تابعی از پارامتر AR می‌شود و به تعداد قابل‌توجهی از پارامترهای لازم را برای تخمین می‌کاهد. در نهایت، توابع ضربه ـ واکنش الگوی MF-VAR را استخراج می‌کند. مزیت روش قیسلز (۲۰۱۶)، در این است که امکان استفاده از مزایای رایج الگوهای خودرگرسیون‌برداری VAR را برای متغیرهایی با دوره تناوب مختلط فراهم می‌کند. چنانچه قیسلز و همکاران (۲۰۱۶)، امکان آزمون علیت گرنجری را برای MF-VAR معرفی‌شده در قیسلز (۲۰۱۶) گسترش می‌دهند. مجموعه اطلاعات موجود در متغیرهای دوره تناوب پایین یعنی متغیر x_L، به شکل $x_L(-\infty,\tau_L]$ است که اطلاعات مشاهده‌شده را تا زمان τ_L نشان می‌دهد. به همین ترتیب، با تجزیه متغیر تناوب بالا به $x_{H,1}$ و $x_{H,2}$ مجموعه اطلاعات در دسترس $x_{H,i}$ را با $x_{H,i}(-\infty,\tau_L]$ نشان می‌دهند. همچنین، مجموعه کل اطلاعات در دسترس را تا زمان τ_L با $\ell(\tau_L) = x_L(-\infty,\tau_L] + x_{H,1}(-\infty,\tau_L] + x_{H,2}(-\infty,\tau_L]$ نشان می‌دهند. اکنون پژوهشگران، نبود علیت گرنجری را در الگوی MF-VAR به شکل زیر تعریف می‌کنند که $x_{H,1}$ علیت گرنجری x_L نیست اگر:

$$P\big[x_L(\tau_L + h)\big|x_L(-\infty,\tau_L] + x_{H,2}(-\infty,\tau_L]\big] = P\big[x_L(\tau_L + h)\big|\ell(\tau_L)\big] \ \ \forall\tau_L \in \mathbb{Z} \qquad (۷)$$

یعنی مجموعه اطلاعات $x_{H,1}(-\infty,\tau_L]$ بهبودی در پیش‌بینی x_L برای h دوره آینده ایجاد نمی‌کند. به همین ترتیب، x_L علیت گرنجری $x_{H,1}$ نیست اگر:

$$P\big[x_{H,1}(\tau_L + h)\big|x_{H,1}(-\infty,\tau_L] + x_{H,2}(-\infty,\tau_L]\big] = P\big[x_{H,1}(\tau_L + h)\big|\ell(\tau_L)\big] \ \ \forall\tau_L \in \mathbb{Z} \qquad (۸)$$

یعنی در دسترس بودن یا نبودن مجموعه اطلاعات $x_L(\tau_L + h)$ تغییری در پیش‌بینی $x_{H,1}$ برای h دوره آینده ایجاد نمی‌کند. همچنین گوتز و همکاران (۲۰۱۶)، به استخراج آزمون علیت گرنجری در الگوی MF-VAR می‌پردازند. تفاوت این پژوهش نسبت به قیسلز و همکاران (۲۰۱۶)، در این است که به‌طور خاص برای حالتی که تفاوت دوره تناوبی بین متغیرهای حاضر در الگو زیاد است، پاسخی معرفی می‌کند. به عبارت دقیق‌تر، وقتی m بزرگ باشد، در روش‌های مبتنی بر MIDAS حالت‌هایی که متغیر تناوب بالا ماهانه و متغیر تناوب پایین فصلی یا متغیر تناوب بالا فصلی و متغیر تناوب پایین سالانه است، m برابر با ۳ یا ۴ است، در حالی که اگر متغیر تناوب بالا روزانه و تناوب پایین ماهانه باشد، $m = 30$ است. چنین حالت‌هایی، مسئله ازدیاد فزاینده پارامتر را به صورت بسیار بزرگ‌تری

ایجاد می‌کنند. گوتز و همکاران (۲۰۱۶)، برای مواجهه با این مسئله متغیرهای تناوب بالا را به شکل AR(q) فرض می‌کنند که حالت کلی‌تر فرض AR(1) در پژوهش قیسلز (۲۰۱۶) است. در ادامه قیسلز و همکاران (۲۰۱۶)، که علیت گرنجری را در MF-VAR گسترش می‌دهند، گوتز و هیک (۲۰۱۴)، به بررسی علیت آنی[1] در الگوی MF-VAR می‌پردازند. برای این منظور، الگوی (۹) را در نظر می‌گیرند:

$$A_c Z_t = A_1 Z_{t-1} + \cdots + A_p Z_{t-p} + \varepsilon_t \qquad (۹)$$

که در آن Z_t حاوی متغیر تناوب پایین y_t و متغیر دوره تناوبی بالای پشته‌سازی‌شده X_t است. همچنین، ε_t ماتریس کوواریانس قطری Σ_ε دارد و A_c نیز روابط همزمان[2] بین متغیرها را نشان می‌دهد. فرم حل‌شده الگوی (۹) عبارت است از:

$$Z_t = A_1^* Z_{t-1} + \cdots + A_p^* Z_{t-p} + u_t \qquad (۱۰)$$

که $A_i^* = A_c^{-1} A_i$، $u_t = A_c^{-1} \varepsilon_t$ و $\Sigma_u = A_c^{-1} \Sigma_\varepsilon A_c^{-1\prime}$ است. پژوهشگران برای این‌که تعریف علیت گرنجری و پس از آن، علیت آنی را به‌طور شفاف‌تر ارائه کنند، به تصریح یک مثال کلی با فرض متغیر تناوب پایین فصلی و تناوب بالای ماهانه به شکل فرم (۱۱) می‌پردازند:

$$\begin{pmatrix} 1 & \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \delta & 1 & -\rho_1 & -\rho_2 \\ 0 & 0 & 1 & -\rho_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_t \\ x_t^{(3)} \\ x_{t-\frac{1}{3}}^{(3)} \\ x_{t-\frac{2}{3}}^{(3)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho_y & \phi_1 & \phi_2 & \phi_3 \\ \pi_1 & \rho_3 & 0 & 0 \\ \pi_2 & \rho_2 & \rho_3 & 0 \\ \pi_3 & \rho_1 & \rho_2 & \rho_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_{t-1} \\ x_{t-1}^{(3)} \\ x_{t-1-\frac{1}{3}}^{(3)} \\ x_{t-1-\frac{2}{3}}^{(3)} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \varepsilon_{1t} \\ \varepsilon_{2t} \\ \varepsilon_{3t} \\ \varepsilon_{4t} \end{pmatrix} \qquad (۱۱)$$

که فرم حل‌شده آن نیز عبارت است از:

$$Z_t = \begin{pmatrix} \rho_y^* & \phi_1^* & \phi_2^* & \phi_3^* \\ \pi_1^* & a_{2.2}^* & a_{2.3}^* & a_{2.4}^* \\ \pi_2^* & a_{3.2}^* & a_{3.3}^* & a_{3.4}^* \\ \pi_3^* & a_{4.2}^* & a_{4.3}^* & a_{4.4}^* \end{pmatrix} Z_{t-1} + u_t \qquad (۱۲)$$

حال مطابق با نتایج قیسلز و همکاران (۲۰۱۶)، X_t علیت گرنجری y_t نیست اگر $\phi_1^* = \phi_2^* = \phi_3^* = 0$

1. Nowcasting Causality
2. Contemporaneous Relationships

باشد. به‌طور مشابه، y_t علیت گرنجری X_t نیست اگر $\pi_1^* = \pi_2^* = \pi_3^* = 0$ باشد. علاوه بر علیت گرنجری، پژوهشگران نوعی علیت جدید را که علیت آنی می‌نامند، معرفی می‌کنند. برای مرور تعریف علیت آنی توسط گوتز و هیک (۲۰۱۴)، نیاز به آشنایی با نمادهاست. بر اساس این، Ω_t مجموعه اطلاعات موجود در زمان t است، چنانچه $x_t^{(m)} \in \Omega_t$ اما $x_{t+\frac{1}{m}}^{(m)} \notin \Omega_t$ و Ω_t^W مجموعه اطلاعات شامل اطلاعات همه فرایندهای تصادفی به‌جز W باشند. همچنین، بهترین پیش‌بینی خطی y_{t+1} مبتنی بر Ω_t^W با $P[y_{t+1}|\Omega_t^W]$ است و به‌طور متناظر در مورد X_{t+1} با $P[X_{t+1}|\Omega_t^W]$ است. حال بین y و X علیت آنی وجود دارد، اگر:

$$P\left[y_{t+1}\middle|\Omega_t \cup \Omega_{t+1}^{y}\right] \neq P[y_{t+1}|\Omega_t] \qquad (۱۳)$$

$$P[X_{t+1}|\Omega_t \cup \Omega_{t+1}^{X}] \neq P[X_{t+1}|\Omega_t] \qquad (۱۴)$$

یعنی افزوده شدن اطلاعات درباره X_{t+1} به مجموعه اطلاعات در دسترس در دوره t به بهبود پیش‌بینی y_{t+1} می‌انجامد، یا این‌که افزودن اطلاعات درباره y_{t+1} به مجموعه اطلاعات در دسترس در دوره t پیش‌بینی X_{t+1} را بهبود می‌دهد، یا هر دو. در مورد مثال کوچک تصریح‌شده، نبود علیت آنی متناظر با $\beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = 0$ و $\delta = 0$ است. پژوهشگران با این تعریف از علیت آنی به ارائه قیود متناظر برای فرم خلاصه‌شده درباره علیت آنی و فقدان علیت آنی می‌پردازند.

فرونی و مارسلینو[1] (۲۰۱۴)، نشان می‌دهند که خودرگرسیون‌برداری واکنش‌ها را با دوره تناوب یکسان و با تورش برآورد می‌کند که این موضوع به خاطر مشکل شناسایی شوک‌های ساختاری با استفاده از صرف اطلاعات متغیرهای دوره تناوب پایین و نادیده گرفتن تعامل بین متغیرها در دوره تناوب بالاست. پژوهشگران نشان می‌دهند که هر دوی این مشکلات با استفاده از MF-VAR کاهش می‌یابد، که در واقع بر مزیت استفاده از اطلاعات با دوره تناوب موجود و منتشرشده آن‌ها تاکید می‌کنند. در همین راستا فرونی و همکاران (۲۰۱۳)، برای تخمین الگوی خودرگرسیون‌برداری VAR با متغیرهای دوره تناوبی مختلط از روش‌های کلاسیک و بیزی بهره می‌گیرند. آن‌ها به کمک داده‌های شبیه‌سازی‌شده نشان می‌دهند که میانگین مجذور خطا MSE برای پارامترها جدا از اندازه نمونه و همبستگی بین متغیرها در سیستم، در الگوی MF-VAR با رویکرد MIDAS کم‌تر از VAR با متغیرهای دوره تناوب یکسان است. در حالی که الگوی MF-VAR با رویکرد بیزی نتایجی متفاوتی از VAR با متغیرهای دوره تناوبی یکسان ندارد.

1. Foroni & Marcellino

همان‌طور که اشاره شد، گسترش الگوی خودرگرسیون‌برداری برای متغیرهایی با دوره تناوبی مختلط، امکان بررسی سایر ویژگی‌ها را بر اساس الگوی MF-VAR فراهم می‌کند. در همین راستا دل‌بارو کاسترو و هیک[1] (۲۰۱۶)، به بررسی وجود ویژگی‌های فصلی[2] در الگوی خودرگرسیون‌برداری با متغیرهای دوره تناوب مختلط می‌پردازند. آن‌ها یک مدل خودرگرسیون ساختاری را با متغیرهای دوره تناوب مختلط به شکل مدل (۱۵) در نظر می‌گیرند:

$$A_c Z_t = \widetilde{\Theta} D_t + A_1 Z_{t-1} + \cdots + A_p Z_{t-p} + \varepsilon_t \qquad (۱۵)$$

که در آن Z_t دو متغیر دارد که یکی y_t فصلی و دیگری x_t ماهانه، و ابعاد آن ۱×۴ است. همچنین، $\varepsilon_t \sim NIID(0, \Omega_\varepsilon)$ که Ω_ε قطری است. به علاوه، D_t متغیر مصنوعی فصلی است، چنانچه $D_t = \iota_{\frac{T}{4}} \otimes I_4$ و $\iota_{\frac{T}{4}}$ بردار $\frac{T}{4}$ بُعدی از یک است. همچنین، الگوی جایگزین مصنوعی فصلی را با نمایش مثلثاتی به شکل الگوی (۱۶) معرفی می‌کند:

$$Z_t = \Psi T_t + \Phi_1 Z_{t-1} + \varepsilon_t \qquad (۱۶)$$

که در آن $T_t = \left[\cos(0t), \cos\left(\frac{\pi}{2}t\right), \sin\left(\frac{\pi}{2}t\right), \cos(\pi t)\right]$ است. پژوهشگران قیود بر $\widetilde{\Theta}$ یا Ψ را در یک الگوی MF-VAR مرتبه P با استفاده از ماتریس R با آزمون والد زیر بررسی می‌کنند.

$$\xi_w = \left[R vec(\widehat{\Pi})\right]' \left(R \hat{\Sigma} R\right)^{-1} \left[R vec(\widehat{\Pi})\right] \qquad (۱۷)$$

که $\hat{\Sigma} = (W'W)^{-1} \otimes \widehat{\Omega}_u$ است. $\widehat{\Pi}$ تخمین حداقل مربعات $(\widehat{\Theta}, \widehat{\Phi}_1, \cdots, \widehat{\Phi}_p)$ با استفاده از $Z'W(W'W)^{-1}$ است و $W = (W_1, \cdots, W_T)'$ یک بردار $T \times (4 + np)$ پشته‌سازی‌شده از مشاهده‌های رگرسورها متناظر با $W_t = \left(D_t, Z_{t-1}, \cdots, Z_{t-p}\right)'$ است. همچنین، $\widehat{\Omega}_u = \frac{1}{T}\hat{u}'\hat{u}$ است و در نهایت ξ_W به‌طور مجانبی توزیع $\chi^2_{rank(R)}$ دارد. در ادامه، پژوهشگران با معرفی فرضیه‌های متفاوت که مبتنی بر قیود متفاوت بر ماتریس بر $\widetilde{\Theta}$ یا Ψ است، آماره ξ_W را متناظر با هر یک از فرضیه‌ها محاسبه می‌کنند. سرانجام، چارچوب آزمون ارائه‌شده را روی متغیرهای اشتغال فصلی و ورودی گردشگران ماهانه بکار می‌برند. پژوهش‌های سری‌های زمانی با دوره تناوبی مختلط برداری به‌طور بسیار گسترده‌ای در حال تکامل هستند. در این مسیر اراکر و همکاران (۲۰۱۴)، تخمین بیزی را برای خودرگرسیون‌برداری با

1. Del Barrio Castro & Hecq
2ww. Deterministic Seasonal Features

متغیرهای دوره تناوب مختلط گسترش می‌دهند. قیسلز و همکاران (۲۰۰۶)، چن و قیسلز (۲۰۱۱)، مارسلینو و شوماخر (۲۰۱۰)، و کوزین و همکاران (۲۰۱۱)، به تکامل، گسترش، و کاربرد مدل‌های سری‌های زمانی چندمتغیره با دوره تناوبی مختلط می‌پردازند. نیاز به اشاره است که پژوهشگران در سری‌های زمانی با دوره تناوبی مختلط برداری، علاوه بر تکامل و گسترش رویکردهای رایج در سری‌های زمانی با دوره تناوبی یکسان، به مقایسه بین دو رویکرد می‌پردازند. در این مقایسه، برتری و منفعت رویکرد تناوب مختلط به لحاظ استفاده از اطلاعات بیش‌تر است و بنابراین، قدرت توضیح‌دهندگی و پیش‌بینی بیش‌تر در تخمین، و کارایی بیش‌تر در توزیع را در مقابل هزینه پیچیدگی بیش‌تر به نمایش می‌گذارند.

هم‌انباشتگی تک‌معادله‌ای با متغیرهای دوره تناوبی مختلط

همان‌طور که از ابتدای این پژوهش دنبال شده است، تاکنون پژوهش‌های گسترده‌ای در خصوص طراحی الگوهایی با حضور متغیرها از دوره تناوبی متفاوت صورت گرفته است. با این حال، باید اشاره کرد که ویژگی تمام این پژوهش‌ها آن است که به متغیرهای مانا با دوره تناوبی متفاوت محدود هستند. پژوهش‌های اندکی در شاخهٔ سری‌های زمانی با دوره تناوبی متفاوت به متغیرهای انباشته از مرتبه اول می‌پردازند. در حالی که در حوزه متغیرهای انباشته از مرتبه یکم، نادیده گرفتن اطلاعات موجود در سری‌های زمانی با تواتر بالاتر نگرانی تورش را در تخمین و تحریف توزیع به‌وجود می‌آورد. به‌ویژه در مورد متغیرهای انباشته از مرتبه یکم این احتمال وجود دارد که تجمیع زمانی به حذف حرکات چرخه‌ای[1] و هم‌حرکتی چرخه‌ای بین سری‌های زمانی منجر شود. احتمال بروز چنین مشکلاتی، ایده اولیه پژوهش‌ها را در حوزه سری‌های زمانی با تواتر متفاوت مبتنی بر متغیرهای انباشته از مرتبه یکم شکل می‌دهد. در حوزه بررسی رفتار سری‌های زمانی انباشته از مرتبه یکم با دوره مختلط در چارچوب تک‌معادله‌ای می‌توان به میلر (۲۰۱۴) اشاره داشت. میلر (۲۰۱۴)، به بررسی احتمال وجود روندهای تصادفی مشترک بین سری‌های زمانی با دوره تناوبی متفاوت می‌پردازد. میلر (۲۰۱۴)، تلاش می‌کند که با معرفی رگرسیون هم‌انباشته با داده‌های تناوب مختلط[2]، که با CO-MIDAS نشان داده می‌شود، به بررسی وجود روندهای تصادفی مشترک بپردازد. وی مدل (۱۸) را پایه کار خود قرار می‌دهد:

1. Cyclical Movement
2. Cointegrating MIDAS Regressions

$$y_{t+1} = \rho y_t + \beta' \sum_{k=0}^{m-1} \pi_{k+1} x_{t+1-\frac{k}{m}}^{(m)} + \varepsilon_{t+1} \quad (۱۸)$$

که مشابه قبل m نشان‌دهنده تعداد مشاهده متغیر تناوب بالا در یک دوره تکرار تناوب پایین است، و همچنین متغیرها انباشته از مرتبه یک هستند. وی نمایش تصحیح خطای مدل را به شکل زیر استخراج می‌کند:

$$\Delta y_{t+1} = (\rho - 1) y_t + \beta' x_{t+1} - \beta' \pi(L) \Delta^{(1/m)} x_{t+1}^{(m)} + \varepsilon_{t+1} \quad (۱۹)$$

که $\pi(z) = \sum_{k=0}^{m-2} \sum_{s=k+1}^{m-1} \pi_{s+1} z^{k/m}$ است. میلر (۲۰۱۴)، برای مواجهه با مشکل ازدیاد فزاینده پارامتر از رویکرد معرفی‌شده در قیسلز و همکاران (۲۰۰۷)، یعنی تصریح صرفه‌جویانه غیرخطی MIDAS با آلمون‌نمایی دوپارامتری استفاده می‌کند. در نهایت، به استخراج توزیع برای برآوردگر NLS[1] اشاره‌شده می‌پردازد. او رویکرد خود را برای پیش‌بینی[2] تولید فصلی حقیقی جهان به وسیله شاخص‌های مالی ماهانه بکار می‌گیرد. گوتز و همکاران (۲۰۱۴)، سری‌های زمانی انباشته را از مرتبه یکم با دوره تناوبی متفاوت و با مدل خودرگرسیون وقفه توزیعی[3] که با MF-ADL نشان داده می‌شود، گسترش می‌دهند. آن‌ها مدل خود را به شکل مدل (۲۰) نشان می‌دهند:

$$A(L) y_t^{(m)} = c + B_0(L^{1/m}) x_t^{(m)} + B_1(L^{1/m}) x_{t-1}^{(m)} + \cdots + B_{ql}(L^{1/m}) x_{t-ql}^{(m)} + \varepsilon_t^{(m)} \quad (۲۰)$$

که فرض می‌شود ε_t دنباله تفاضلی مارتینگل[4] است. همچنین، $A(L) = 1 - \alpha_1 L - \cdots - \alpha_{pl} L^{pl}$ و $B_i(L) = \beta_{0i} + \beta_{1i} L^{(1/m)} + \cdots + \beta_{qhi} L^{(qh/m)}$ برای $i = \langle 0, q_l \rangle$ است. بنابراین گوتز و همکاران (۲۰۱۴)، نمایش ECM[5] مدل ارائه‌شده را به شکل مدل (۲۱) استخراج می‌کنند:

$$A^*(L) \Delta y_t = c - A(1) \left[y_{t-1} - \frac{\sum_{j=0}^{ql} B_j(1)}{A(1)} L^{i/m} x_{t-1}^{(m)} \right] + B^*(L^{1/m}) \Delta^{(1/m)} x_t^{(m)} + \varepsilon_t \quad (۲۱)$$

که $B^*(L^{1/m})$ چندجمله‌ای تجمیع از مرتبه $mql + qh$ است. پژوهشگران برای آزمون هم‌انباشتگی

1. Nonlinear Least Square
2. Nowcasting
3. Autoregressive Distributed Lag Model
4. Martingale Difference Sequence
5. Error Correction Model

از فرایند دومرحله‌ای انگل و گرنجر[1] استفاده می‌کنند. یعنی y_{t-1} را بر همه $x^{(m)}_{t-1-\frac{i}{m}}$ها $i=\langle 0, m-1\rangle$ رگرسیون می‌کنند و اگر پسماندهای حاصل از این رگرسیون فرایند مانا باشند، دو سری زمانی هم‌انباشته‌اند. در نهایت پژوهشگران از مدل MF-ADL برای پیش‌بینی متغیر تناوب پایین استفاده می‌کنند. نکته مهم در پژوهش‌ها این است که بر پیش‌بینی تمرکز دارند. به این ترتیب که با استفاده از تخمین تک‌معادله‌ای، متغیر تناوب پایین را بر متغیرهای تناوب بالا رگرسیون می‌کنند و برای پیش‌بینی بهتر از آن بهره می‌گیرند. گروه دیگری از پژوهش‌ها، علاوه بر دغدغه کار با سری‌های زمانی نامانا با دوره تناوبی متفاوت، تمرکز خود را بر استخراج بردار هم‌انباشتگی می‌گذارند. در بخش بعدی، مروری بر پژوهش‌های حوزه هم‌انباشتگی با متغیرهای دوره تناوب مختلط در سیستم معادله‌ها خواهیم داشت.

هم‌انباشتگی با متغیرهای دوره تناوب مختلط در سیستم چندمتغیره

بررسی رفتار بلندمدت سری‌های زمانی انباشته از مرتبه یکم دوره تناوب مختلط به صورت تک‌معادله از ابعاد متفاوتی ضعف دارد. پژوهش‌های مبتنی بر روش‌های تک‌معادله احتمال درون‌زایی را بین متغیرها نادیده می‌گیرند و همچنین، توجهی به احتمال وجود چندین بردار هم‌انباشتگی ندارند. از این‌رو، پژوهشگران حوزهٔ متغیرهای دوره تناوب مختلط به سمت رفع این مسئله گام برمی‌دارند. گوتز و همکاران (۲۰۱۳)، برای بررسی هم‌انباشتگی میان سری‌های زمانی دارای دوره تناوبی مختلط، به پیروی از کار انگل و کوزیکی[2] (۱۹۹۳)، و وحید و انگل[3] (۱۹۹۳)، به بررسی وجود ویژگی روند مشترک و چرخه مشترک بین سری‌های زمانی انباشته از مرتبه یکم، در زمانی که دوره تناوب آن‌ها مختلط باشد، می‌پردازند. گوتز و همکاران (۲۰۱۳)، برای الگوسازی از فرم پشته‌سازی‌شده متغیر تناوب بالا استفاده می‌کنند، یعنی متغیر تناوب بالا را به شکل بردار $m \times 1$ بعدی $X^{(m)}_t$ می‌سازند که در مشاهده‌های متغیر تناوب بالا درون دوره tام تناوب پایین می‌سازد؛ یعنی $X^{(m)}_t = \left(x^{(m)}_t, x^{(m)}_{t-\frac{1}{m}}, \dots, x^{(m)}_{t-\frac{m-1}{m}}\right)'$ است. در نهایت بردار Z_t که شامل متغیر تناوب پایین و تناوب بالاست، به شکل $Z_t = \left(y_t, X^{(m)'}_t\right)'$ تعریف می‌شود که درایه نخست بردار Z_t یک متغیر تناوب پایین و به دنبال آن یک متغیر تناوب بالا پشته‌شده است، که در هر یک دوره مشاهده، متغیر تناوب پایین m بار مشاهده می‌شود. حال از متغیر Z_t برای مدلسازی استفاده می‌شود و بردار پشته‌شده Z_t دارای

1. Engle & Granger
2. Engle & Kozicki
3. Vahid & Engle

ابعاد $(m+1)\times 1$ است. آن‌ها نشان می‌دهند که با سری‌های زمانی نامانای تناوب مختلط به شکل بردار Z_t معرفی‌شده، دو دسته روابط بلندمدت می‌توان بین متغیرها یافت: ۱. رابطه بلندمدت درون متغیرهای $I(1)$ دوره تناوب بالا؛ و ۲. رابطه بلندمدت احتمالی بین متغیر دوره تناوب پایین و متغیر دوره تناوب بالا. تحت شرایطی که رابطه بلندمدت دوم وجود نداشته باشد، می‌توان با تفاضل گرفتن از متغیرها آن‌ها را تبدیل به متغیر مانا کرد و با استفاده از الگوی MF-VAR معرفی‌شده برای متغیرهای مانا، روابط بین متغیرها را بررسی کرد. گوتز و همکاران (۲۰۱۳)، الگوی VAR زیر را در نظر می‌گیرند:

$$Z_t = \Gamma_1 Z_{t-1} + \cdots + \Gamma_p Z_{t-p} + \varepsilon_t \qquad (۲۲)$$

که $Z_t = \left(y_t, X_t^{(m)\prime}\right)'$ و $\varepsilon_t \sim i.i.d.N(0, I_{m+1})$ است. آن‌ها الگوی یادشده را با نمایش VECM[1] بازنویسی می‌کنند. یعنی:

$$\Delta Z_t = \tilde{\Gamma}_1 \Delta Z_{t-1} + \cdots + \tilde{\Gamma}_{p-1} \Delta Z_{t-p+1} + \Pi Z_{t-1} + \varepsilon_t \qquad (۲۳)$$

که $\tilde{\Gamma}_i = -\sum_{k=i+1}^{p} \Gamma_k$ برای $i = \langle 1, p-1 \rangle$ و $\Pi = -\left(I - \sum_{j=1}^{p} \Gamma_j\right) = \alpha\beta'$ است و رتبه Π نیز عبارت از $rank(\Pi) = (r_0 + r_1) < m+1$ است. رتبه هم‌انباشتگی را مجموع دو نوع رابطه بلندمدت تعریف می‌کنند، یعنی r_0 بردار رابطه هم‌انباشتگی از پیش تعیین‌شده که همان رابطه بلندمدت درون متغیر تناوب بالاست، و دست‌بالا می‌توان $m-1$ رابطه بلندمدت از پیش تصریح‌شده متصور شد. برای درک بهتر فرض کنیم که متغیر تناوب پایین فصلی و متغیر تناوب بالا ماهانه است. بردار Z_t عبارت از بردار ۱×۴ خواهد بود که درایه نخست آن متغیر تناوب پایین و درایه دوم، اولین مشاهده تناوب بالا درون هر دوره مشاهده تناوب پایین است، یعنی ماه یکم هر فصل مشاهده‌ها درایه دوم را شکل می‌دهد. درایه سوم ماه دوم هر فصل و درایه چهارم ماه سوم هر فصل است. حال رابطه بلندمدت از پیش تصریح‌شده اشاره به رابطه میان درایه دوم تا چهارم متغیر Z_t دارد، یعنی رابطه بلندمدت درون متغیر تناوب بالا که از لحاظ شهودی به‌طور کامل درک‌پذیر است. یک متغیر ماهانه انتظار می‌رود که هر ماه با ماه‌های گذشته خودش رابطه داشته باشد که این رابطه با فرم متغیر پشته‌شده سه متغیر مجزا را شکل می‌دهد، که بین‌شان رابطه بلندمدت از پیش تصریح‌شده وجود دارد. دومین نوع رابطه بلندمدت که رتبه هم‌انباشتگی را شکل می‌دهد، r_1 است یعنی رابطه بلندمدت احتمالی

1. Vector Error Correction Model

بین متغیر تناوب پایین و متغیر تناوب بالا. این نوع رابطه بلندمدت ناشناخته است و در آزمون است. چون الگوی گوتز و همکاران (۲۰۱۳) دو متغیره است، یعنی فقط یک متغیر تناوب پایین و یک متغیر تناوب بالا، پس دست‌بالا احتمال وجود یک رابطه بلندمدت ناشناخته بین دو متغیر امکان‌پذیر است. در موردی که بین دو متغیر تناوب بالا و تناوب پایین هم‌انباشتگی وجود ندارد، رتبه هم‌انباشتگی در مدل VECM دومتغیره ارائه‌شده عبارت از $rank(\Pi) = r_0 = m - 1$ است. زمانی که بین دومتغیر یادشده هم‌انباشتگی وجود دارد، رتبه هم‌انباشتگی عبارت از $rank(\Pi) = r_0 + r_1$ است که در مدل دومتغیره $r_1 = 1$ است. آن‌ها برای آزمون هم‌انباشتگی از رویکرد هوروات و واتسن[1](۱۹۹۵) پیروی می‌کنند که آزمون هم‌انباشتگی را برای حالتی ارائه می‌کند که برخی از بردارهای هم‌انباشتگی از پیش شناخته‌شده هستند. در واقع گوتز و همکاران (۲۰۱۳)، آزمون فرض $H_0 : rank(\Pi) = r_0$ را در مقابل $H_A : rank(\Pi) = r_0 + r_1$ انجام می‌دهند. سرانجام به استخراج روند مشترک[2] و چرخه مشترک[3] می‌پردازند. فرایند آزمون به این صورت است که:

۱. ابتدا طول وقفه را در سطح سری‌های زمانی برای مدل VAR به‌دست می‌آوریم تا مقدار p مشخص شود. برای این کار از معیارهای آکائیک[4] یا شوارتز[5] یا هنان کویین[6] استفاده می‌کنیم.

۲. با p مفروض رتبه هم‌انباشتگی $r = r_0 + r_1$ را می‌آزماییم که به دلیل وجود بردار هم‌انباشتگی از پیش تصریح‌شده، متکی بر روش هوروات و واتسن (۱۹۹۵) است.

۳. در غیاب هم‌انباشتگی اضافی (یعنی هم‌انباشتگی بین متغیر تناوب پایین و تناوب بالا)، رگرسیون رتبه کاهشی را با استفاده VAR تبدیل‌یافته انجام می‌دهیم که با استفاده از آزمون روی مقادیر ویژه صفر به‌دست‌آمده از تحلیل همبستگی کانونی به شکل زیر است:

$$cancor\left\{\Delta Z_t^*, \begin{pmatrix} \Delta Z_{t-1}^* \\ \vdots \\ \Delta Z_{t-p+1}^* \\ \tilde{Z}_{t-p}^0 \end{pmatrix}\right\} \qquad (۲۴)$$

که $cancor\{V_t, W_t\}$ رابطه همبستگی کانونی بین V_t و W_t است و:

1. Horvath & Watson
2. Common Trend
3. Common Cycle
4. Akaike Info Criterion
5. Schwarz Criterion
6. Hannan-Quinn Criterion

$$\Delta Z_t^* = \begin{pmatrix} \Delta y_t \\ \Delta^{\left(\frac{1}{m}\right)} x_t^{(m)} \\ \vdots \\ \Delta^{\left(\frac{1}{m}\right)} x_{t-\frac{m-2}{m}}^{(m)} \\ \Delta^{\left(\frac{1}{m}\right)} x_{t-\frac{m-1}{m}}^{(m)} \end{pmatrix}, \ \tilde{Z}_t = \begin{pmatrix} y_t \\ \Delta^{\left(\frac{1}{m}\right)} x_t^{(m)} \\ \vdots \\ \Delta^{\left(\frac{1}{m}\right)} x_{t-\frac{m-2}{m}}^{(m)} \\ x_{t-\frac{m-1}{m}}^{(m)} \end{pmatrix}, \ \tilde{\varepsilon}_t = \begin{pmatrix} \varepsilon_{t,y} \\ \Delta^{\left(\frac{1}{m}\right)} \varepsilon_t^{(m)} \\ \vdots \\ \Delta^{\left(\frac{1}{m}\right)} \varepsilon_{t-\frac{m-2}{m}}^{(m)} \\ \varepsilon_{t-\frac{m-1}{m}}^{(m)} \end{pmatrix} \quad (۲۵)$$

و $\tilde{Z}_{t-p}^0$ معادل با $\tilde{Z}_{t-p}$ به‌جز اولین و آخرین درایه است، یعنی:

$$\tilde{Z}_{t-p}^0 = \begin{pmatrix} 0 \\ \Delta^{\left(\frac{1}{m}\right)} x_{t-p}^{(m)} \\ \vdots \\ \Delta^{\left(\frac{1}{m}\right)} x_{t-p-\frac{m-2}{m}}^{(m)} \\ 0 \end{pmatrix} \quad (۲۶)$$

آزمون نسبت راست‌نمایی که با ξ_{LR} نشان می‌دهیم، آزمون فرض صفر را این‌گونه در نظر می‌گیرد که s بردار ویژگی مشترک وجود دارد در مقابل فرضیه بیش‌تر از s بردار یعنی $H_0\!: rank(\delta) \le s$ و در مقابل $H_A\!: rank(\delta) > s$. آماره آزمون به شکل معادله (۲۷) است:

$$\xi_{LR} = -T \sum_{i=1}^{s} ln\left(1 - \hat{\lambda}_i\right) \quad (۲۷)$$

که $\hat{\lambda}_i$ عبارت از iامین همبستگی کانونی مربع کوچک‌ترین است. یعنی iامین مقدار ویژه کوچک به‌دست‌آمده از رابطه (۲۸) است:

$$\hat{\Sigma}_{VV}^{-1} \hat{\Sigma}_{VW} \hat{\Sigma}_{WW}^{-1} \hat{\Sigma}_{WV} \quad (۲۸)$$

که $\hat{\Sigma}_{ij}$ ماتریس واریانس تجربی بین i و j که $i,j = (V,W)$ است.

۴. در حالت وجود بردار r_1 رابطه هم‌انباشتگی، مقادیر ویژه، و بردارهای ویژه از رابطه (۲۹ و ۳۰) به‌دست می‌آیند:

$$cancor\left\{ \Delta Z_t^*, \begin{pmatrix} \Delta Z_{t-1}^* \\ \vdots \\ \Delta Z_{t-p+1}^* \\ \tilde{Z}_{t-p} \end{pmatrix} \right\} \quad (۲۹)$$

که

$$\tilde{Z}_{t-p} = \begin{pmatrix} y_{t-p} \\ \Delta^{\left(\frac{1}{m}\right)} x_{t-p}^{(m)} \\ \vdots \\ \Delta^{\left(\frac{1}{m}\right)} x_{t-p-\frac{m-2}{m}}^{(m)} \\ x_{t-p-\frac{m-1}{m}}^{(m)} \end{pmatrix} \quad (۳۰)$$

است. با وجود این‌که گوتز و همکاران (۲۰۱۳)، به مسئله درون‌زایی توجه دارند و به صورت سیستم معادله‌ها الگوسازی می‌کنند، اما در عمل رابطه هم‌انباشتگی را بین دو متغیر دوره تناوب مختلط بررسی می‌کنند؛ ضمن این‌که از آزمون اثر جوهانسن (۱۹۸۸) استفاده نمی‌کنند. قیسلز و میلر (۲۰۱۵)، علاوه بر این‌که تخمین بردار هم‌انباشتگی را برای یک بردار چندمتغیره با دوره تناوب مختلط تعمیم می‌دهند، آزمون جوهانسن را نیز برای حالت چندمتغیره مختلط استخراج می‌کنند و تحریف توزیع را نسبت به حالتی که همه متغیرها به یک دوره تناوبی یکسان تجمیع زمانی شوند، به‌دست می‌آورند. قیسلز و میلر (۲۰۱۵)، این استدلال را دارند که حتی اگر تجمیع زمانی هم‌انباشتگی را تغییر ندهد، می‌تواند به تحریف اندازه[1] منجر شود. یعنی اندازه واقعی[2] از اندازه اسمی[3] منحرف شود، زمانی که از مقادیر بحرانی توزیع‌های استاندارد استفاده شود.[4] همچنین، آن‌ها نشان می‌دهند که با افزایش m میزان انحراف اندازه نیز افزایش می‌یابد. بنابراین، لزوم الگوسازی سری‌های زمانی به صورت مختلط را بیش از مسئله از دست رفتن اطلاعات می‌دانند و مدعی‌اند که اعتبار استنباط آماری نیز کاهش می‌یابد. آن‌ها در ادامه کار آماره آزمون را برای مدل‌های تصحیح خطای برداری با داده‌های تناوب مختلط ارائه می‌کنند و توزیع آن را استخراج می‌کنند. همچنین، با معیار قرار دادن حالت تناوب مشترک به مقایسه نتایج الگوی تناوب مختلط با تناوب یکسان می‌پردازند. آماره آزمونی که قیسلز و میلر (۲۰۱۵)، برای آزمون هم‌انباشتگی استخراج می‌کنند، بر آزمون اثر جوهانسن (۱۹۸۸) متکی است و این آزمون را برای داده‌های تناوب مختلط گسترش می‌دهد. قیسلز و میلر (۲۰۱۵)، الگوی VECM را به شکل رابطه (۳۱) تعریف می‌کنند:

1. Size Distortion
2. Actual Size
3. Nominal Size

۴. اندازه واقعی آزمون مجانبی (سطح معناداری)، وقتی $n \to \infty$ همان سطح معناداری اسمی ۵ درصد است. در نمونه‌های متناهی، اندازه واقعی آزمون مجانبی می‌تواند کم‌تر یا بزرگ‌تر از ۵ درصد باشد. تفاوت بین اندازه واقعی و اندازه اسمی همان انحراف اندازه است.

$$\Delta z_t^m = \Gamma^m A^{m'} z_{t-1}^m + \eta_t^m \quad (۳۱)$$

که $z_t^m = \Pi_m z_t$ و A^m و Γ^m ماتریس‌هایی با ابعاد $(p_l + mp_h) \times r$ هستند. مدل تناوب مختلط ارائه‌شده شامل $p_l + mp_h$ سری زمانی است، اما $(m-1)p_h$ رابطه هم‌انباشتگی از پیش شناخته‌شده در آن است. بنابراین، آزمایش فرضیه آزمون هم‌انباشتگی عبارت از $r_0 + (m-1)p_h$ رابطه هم‌انباشتگی است. آماره آزمون اثر تناوب مختلط به شکل رابطه (۳۲) استخراج می‌شود:

$$\begin{aligned} -2logQ\left(H_{r_0+(m-1)p_h|p_l+mp_h}\right) &= -T\sum_{i=r_0+(m-1)p_h+1}^{p_l+mp_h} log\left(1-\hat{\lambda}_i\right) \\ &= Ttr\{(R_{11}^m)^{-1}R_{10}^m(R_{00}^m)^{-1}R_{01}^m\} + o_P(1) \end{aligned} \quad (۳۲)$$

که $R_{gh}^m = \Pi_m R_{gh}\Pi_m'$ و $R_{gh} = T^{-1}\sum_{t=1}^{T} r_{gt}r_{ht}'$ به‌ازای $g,h = 0,1$ که $r_{0t} = \Delta z_t$ و $r_{0t} = z_{t-1}$ است. همچنین، $\hat{\lambda}_1$ و ... و $\hat{\lambda}_{p_l+mp_h}$ حل معادله دترمینان زیر هستند.

$$|\lambda I - (R_{11}^m)^{-1}R_{10}^m(R_{00}^m)^{-1}R_{01}^m| = 0 \quad (۳۳)$$

ملاحظه می‌شود که مسئله وجود بردار هم‌انباشتگی از پیش تعیین‌شده با تعدیل فرض صفر $r = r_0$ به فرض $r = r_0 + (m-1)p_h$ تصحیح می‌شود. به عبارت دقیق‌تر، تعداد $(m-1)p_h$ از ابتدا بزرگ‌ترین مقادیر ویژه را به دلیل وجود هم‌انباشتگی‌های از پیش تعیین‌شده کنار می‌گذارد و آزمون را برای باقی‌مانده مقادیر ویژه انجام می‌دهد. در ادامه، برای آماره آزمون به‌دست‌آمده توزیع استخراج می‌کند. با فرضیه وجود $(m-1)p_h$ رابطه هم‌انباشتگی در سیستم تناوب مختلط، که معادل با $r_0 = 0$ است، آماره آزمون اثر به شکل $Ttr\{(R_{11}^m)^{-1}R_{10}^m(R_{00}^m)^{-1}R_{01}^m\}$ است و توزیع مجانبی آن به شکل زیر خواهد بود:

$$tr\left\{\Xi_{10}^{m\prime}(\Xi_{11}^m)^{-1}\Xi_{00}^m(\Xi_{00}^m)^{-1}\right\} \quad (۳۴)$$

که

$$\Xi_{00}^m = \Pi_m(\Sigma \otimes m^{-1}H_{00})\Pi_m' \quad (۳۵)$$

$$\Xi_{11}^{m} = \Pi_m \left(\Sigma^{\frac{1}{2}} \int WW' \Sigma^{\frac{1}{2}'} \otimes u' \right) \Pi_m' \tag{۳۶}$$

$$\Xi_{10}^{m} = \Pi_m \left(\Sigma^{\frac{1}{2}} \int WdW' \Sigma^{\frac{1}{2}'} \otimes u' + (\Sigma \otimes m^{-1} H_{10}) \right) \Pi_m' \tag{۳۷}$$

چنانکه $T \to \infty$ می‌گراید. آشکارا ملاحظه می‌شود که توزیع بدون تجمیع زمانی متفاوت است با زمانی که متغیرها با تجمیع زمانی به یک دوره تناوبی تبدیل می‌شوند. قیسلز و میلر (۲۰۱۵)، در ادامه به تخمین و توزیع هم‌انباشتگی به صورت تک‌معادله با رویکرد انگل و گرنجر می‌پردازند. نتایج رگرسیون تک‌معادله نشان‌دهنده تحریف توزیع در زمان تجمیع زمانی است. در ادامه، گوتز و هیک (۲۰۱۹)، و میلر (۲۰۱۶؛ ۲۰۱۹)، به گسترش کاربردهای MF-VECM و پژوهش‌های تجربی در این حوزه می‌پردازند.

مروری بر نتایج پژوهش‌های تناوب مختلط نشان می‌دهد که هر نوع تجمیع زمانی به از دست رفتن اطلاعات، چرخه و روند مشترک احتمالی بین متغیرها، تورش تخمین‌ها، و تحریف توزیع منجر می‌شود. با این حال، الگوهای خانواده VAR، از ناحیه ابعاد آسیب‌پذیر هستند و بیم آن هست که به اندازه کافی نتایج مطلوبی دربرنداشته باشند. چه‌بسا به دلیل فرم ورود متغیرهای دوره تناوبی بالاتر، مسئله ازدیاد فزاینده پارامتر در الگوها با متغیرهای دوره تناوبی مختلط بزرگ‌تر باشد. زیرا شیوه الگوسازی متغیرها به شکل پشته‌سازی ابعاد متغیر را به صورت فزاینده بالا می‌برد. این مسئله دغدغه جدیدی پیش می‌آورد که آیا می‌توان راهکاری برای مقابله با مشکل ابعاد در الگوهای MF-VAR و MF-VECM یافت؟

بحث و نتیجه‌گیری

سری‌های زمانی اقتصادی با دوره تناوبی متفاوتی منتشر می‌شوند و همزمان در یک مدلسازی اقتصادی برای توضیح رفتار اقتصادی در کنار یکدیگر قرار می‌گیرند. به‌طور معمول، پژوهشگران در مواجه با این مسئله متغیرهایی با دوره تناوبی بالاتر را تجمیع زمانی می‌کنند و همه متغیرها را به یک دوره تناوب مشترک مبدل می‌سازند. آشکارا در توضیح رفتار یک اقتصاد، دقت پیش‌بینی، شکل‌گیری انتظارها، و سیاستگذاری بهینه نقش اصلی را در اطلاعات بازی می‌کنند. اما تجمیع زمانی به‌روشنی اطلاعات موجود را در سری زمانی با دوره تناوبی بالا نادیده می‌گیرد. به‌تازگی این مسئله، یعنی از بین رفتن اطلاعات با تجمیع زمانی، مسیر جدیدی در پژوهش‌های سری‌های زمانی گشوده است.

پژوهش حاضر تلاش می‌کند که با مروری بر سیر گسترش این شاخهٔ جدید از اقتصادسنجی

سری‌های زمانی به پر کردن شکاف موجود در ادبیات نظری سری‌های زمانی با متغیرهای دوره تناوب مختلط در پژوهش‌های فارسی‌زبان بپردازد. اگرچه اهمیت این پژوهش تنها به ارائه ادبیات نظری شاخه سری‌های زمانی تناوب مختلط محدود نمی‌شود. این پژوهش می‌کوشد که با مرور مسیر پیشرفت ادبیات مدل‌های تناوب مختلط به شناسایی قابلیت‌ها و محدودیت‌های هر یک از الگوها بپردازد. شناخت دقیق ویژگی‌ها و معایب هر الگو به پژوهشگران امکان انتخاب الگوی مناسب را با ویژگی‌های خاص آن فراهم می‌کند.

همان‌طور که اشاره شد، پژوهش‌های سری‌های زمانی با متغیرهای تناوب مختلط با انگیزه استفاده از اطلاعات بیش‌تر به سرعت گسترش یافته است. چنانچه می‌توان گفت در شاخه الگوهای اقتصادسنجی با متغیرهای مانا مسیر تکاملی به‌سرعت پیش می‌رود و در حال حاضر، امکان تخمین بسیاری از روش‌ها با استفاده از داده‌هایی با دوره تناوبی مختلط میسر است. در ادامه، در شاخه سری‌های زمانی نامانا نیز پژوهش‌ها در جهت تکامل روش‌ها با امکان بکارگیری سری‌های زمانی با دوره تناوبی مختلط آغاز شده‌اند، به‌طوری که مدل‌های VECM با امکان استخراج رابطه هم‌انباشتگی بین متغیرها از دوره تناوبی متفاوت و آزمون رابطه هم‌انباشتگی به‌دست‌آمده گسترش یافته‌اند. این پژوهش‌ها با قیسلز و همکاران (۲۰۰۴) آغاز شد و با رگرسیون‌های MIDAS که توانایی مدلسازی متغیرهای دارای تواتر متفاوت را فراهم می‌کنند، به‌سرعت گسترش یافت. چنانچه در حوزه سری‌های زمانی مانا طیف وسیعی از روش‌های رایج با دوره تناوبی یکسان، در حال حاضر با متغیرهایی از دوره تناوبی متفاوت کاربردپذیر است. پژوهش‌های مبتنی بر متغیرهای دوره تناوبی مختلط، علاوه بر این‌که امکان استفاده از اطلاعات بیش‌تر را فراهم می‌کنند، آشکار می‌کنند که تجمیع زمانی در مواردی به تورش در تخمین، تحریف، تغییر ویژگی‌های آماری سری‌های زمانی، و تحریف هم‌حرکتی سری‌های زمانی منجر می‌شوند. علاوه بر این، با استفاده از معیار MSE آشکار می‌شود که استفاده از متغیرهایی با دوره تناوبی متفاوت بدون تجمیع زمانی، کارایی را در مدلسازی اقتصادی افزایش می‌دهد.

همچنین، پژوهشگران در شاخه سری‌های زمانی انباشته از مرتبه بالاتر به گسترش روش‌های رایج با متغیرهای دوره تناوب یکسان به حالت دوره تناوب متفاوت می‌پردازند. الگوهای VAR و VECM به حالت‌های تناوب مختلط گسترش می‌یابد و در حال حاضر، امکان آزمون اثر تعداد بردارهای هم‌انباشتگی جوهانسن با متغیرهای دوره تناوب متفاوت نیز در کنار مدل MF-VECM و بردار هم‌انباشتگی میان متغیرها با دوره تناوبی مختلط فراهم است. همچنین، این پژوهش‌ها نشان می‌دهند که تجمیع زمانی در حوزه متغیرهای انباشته از مرتبه یکم تبعات، متفاوت از موقعیت انباشتگی از

مرتبه صفر است. چنانچه به‌رغم این‌که بردار هم‌انباشتگی با تجمیع زمانی با تورش مواجه نمی‌شود، اما استنباط آماری به‌طور جدی با تردید مواجه است. چرا که توزیع آماره‌ها در حالت متغیرها با دوره تناوبی متفاوت به‌طور کامل با توزیع در زمان تجمیع زمانی و تبدیل به یک دوره تناوب یکسان متفاوت است. به عبارت دقیق‌تر، تجمیع زمانی توزیع را تحریف می‌کند و بنابراین، استنباط آماری هنگام تجمیع زمانی بی‌اعتبار است.

به دلیل محدودیت ابعاد در خانواده، به‌طور معمول پژوهشگران در تنظیم معادله‌ها و روابط اقتصادی مورد بررسی ناگزیر به محدود کردن متغیرهای واردشده در مدل هستند، جدا از این‌که از متغیرهایی با تواتر مختلف استفاده شود یا تواتر یکسان (به واسطه تجمیع زمانی). این موضوع به کاهش قدرت توضیح‌دهندگی و پیش‌بینی مدل‌ها منجر می‌شود. علاوه بر این، پژوهشگران علاقه‌مند می‌توانند در شاخه متغیرهایی با مرتبه انباشتگی از درجه دوم به گسترش ادبیات نظری سری‌های زمانی با متغیرهای تناوب مختلط بپردازند و شکاف را در این شاخه از ادبیات پر کنند.

منابع

الف) انگلیسی

Amemiya, T., & Wu, R. Y. (1972). The Effect of Aggregation on Prediction in the Autoregressive Model. *Journal of the American Statistical Association*, 67(339), 628-632.

Andreou, E., Ghysels, E., & Kourtellos, A. (2010). Regression Models with Mixed Sampling Frequencies. *Journal of Econometrics*, 158(2), 246-261.

Bai, J., Ghysels, E., & Wright, J. H. (2013). State Space Models and MIDAS Regressions. *Econometric Reviews*, 32(7), 779-813.

Breitung, J., & Swanson, N. R. (2002). Temporal Aggregation and Spurious Instantaneous Causality in Multiple Time Series Models. *Journal of Time Series Analysis*, 23(6), 651-665.

Chambers, M. J. (2019). Frequency Domain Estimation of Continuous Time Co-Integrated Models with Mixed Frequency and Mixed Sample Data. *Journal of Time Series Analysis*, 40(6), 887-913.

Chen, X., & Ghysels, E. (2011). News-Good or Bad-and Its Impact on Volatility Predictions Over Multiple Horizons. *The Review of Financial Studies*, 24(1), 46-81.

Clements, M. P., & Galvão, A. B. (2008). Macroeconomic Forecasting with Mixed-Frequency Data: Forecasting Output Growth in the United States. *Journal of Business & Economic Statistics*, 26(4), 546-554.

Del Barrio Castro, T., & Hecq, A. (2016). Testing for Deterministic Seasonality in Mixed-Frequency VARs. *Economics Letters*, 149(1), 20-24.

Engle, R. F., & Kozicki, S. (1993). Testing for Common Features. *Journal of Business &*

Economic Statistics, 11(4), 369-380.
Eraker, B., Chiu, C. W., Foerster, A. T., Kim, T. B., & Seoane, H. D. (2014). Bayesian Mixed Frequency VARs. *Journal of Financial Econometrics*, 13(3), 698-721.
Foroni, C., & Marcellino, M. (2014). Mixed–Frequency Structural Models: Identification, Estimation, and Policy Analysis. *Journal of Applied Econometrics*, 29(7), 1118-1144.
Foroni, C., Ghysels, E., & Marcellino, M. (2013). Mixed-Frequency Vector Autoregressive Models. *Advances in Econometrics*, 32(1), 247-272.
Forsberg, L., & Ghysels, E. (2007). Why Do Absolute Returns Predict Volatility So Well? *Journal of Financial Econometrics*, 5(1), 31-67.
Ghysels, E. (2016). Macroeconomics and the Reality of Mixed Frequency Data. *Journal of Econometrics*, 193(2), 294-314.
Ghysels, E., & Miller, J. I. (2015). Testing for Co-Integration with Temporally Aggregated and Mixed–Frequency Time Series. *Journal of Time Series Analysis*, 36(6), 797-816.
Ghysels, E., & Wright, J. H. (2009). Forecasting Professional Forecasters. *Journal of Business & Economic Statistics*, 27(4), 504-516.
Ghysels, E., Hill, J. B., & Motegi, K. (2016). Testing for Granger Causality with Mixed Frequency Data. *Journal of Econometrics*, 192(1), 207-230.
Ghysels, E., Hill, J. B., & Motegi, K. (2018). *Testing a Large Set of Zero Restrictions in Regression Models, With An Application to Mixed Frequency Granger Causality*. Workshop on Advances in Econometrics 2017 at Hakodate.
Ghysels, E., Santa-Clara, P., & Valkanov, R. (2004). The MIDAS Touch: Mixed Data Sampling Regression Models. *CIRANO Working Papers 2004s-20, CIRANO, Montreal, Canada.*
Ghysels, E., Santa-Clara, P., & Valkanov, R. (2005). There is a Risk-Return Trade-Off After All. *Journal of Financial Economics*, 76(3), 509-548.
Ghysels, E., Santa-Clara, P., & Valkanov, R. (2006). Predicting Volatility: Getting the Most Out of Return Data Sampled at Different Frequencies. *Journal of Econometrics*, 131(1-2), 59-95.
Ghysels, E., Sinko, A., & Valkanov, R. (2007). MIDAS Regressions: Further Results and New Directions. *Econometric Reviews*, 26(1), 53-90.
Götz, T. B., & Hecq, A. (2014). Nowcasting Causality in Mixed Frequency Vector Autoregressive Models. *Economics Letters*, 122(1), 74-78.
Götz, T. B., & Hecq, A. W. (2019). Granger Causality Testing in Mixed–Frequency VARs with Possibly (Co) Integrated Processes. *Journal of Time Series Analysis*, 40(6), 914-935.
Götz, T. B., Hecq, A., & Smeekes, S. (2016). Testing for Granger Causality in Large Mixed-Frequency VARs. *Journal of Econometrics*, 193(2), 418-432.
Götz, T. B., Hecq, A., & Urbain, J. P. (2014). Forecasting Mixed–Frequency Time Series with ECM–MIDAS Models. *Journal of Forecasting*, 33(3), 198-213.
Götz, T. B., Hecq, A., & Urbain, J.-P. (2013). *Testing for Common Cycles in Non-Stationary VARs with Varied Frequency Data, VAR Models in Macroeconomics–New Developments and Applications: Essays in Honor of Christopher A. Sims (Advances in Econometrics, Volume 32)*: Emerald Group Publishing Limited.
Götz, T., & Hauzenberger, K. (2018). Large Mixed-Frequency VARs with a Parsimonious Time-Varying Parameter Structure. *Deutsche Bundesbank Discussion Paper* 40/2018.

Horvath, M. T., & Watson, M. W. (1995). Testing for Co-Integration When Some of the |Co-Integrating Vectors are Prespecified. *Econometric Theory*, 11(5), 984-1014.

Johansen, S. (1988). Statistical Analysis of Co-Integration Vectors. *Journal of Economic Dynamics and Control*, 12(2-3), 231-254.

Kuzin, V., Marcellino, M., & Schumacher, C. (2011). MIDAS vs. Mixed-Frequency VAR: Nowcasting GDP in the Euro Area. *International Journal of Forecasting*, 27(2), 529-542.

Kvedaras, V., & Račkauskas, A. (2010). Regression Models with Variables of Different Frequencies: The Case of a Fixed Frequency Ratio. *Oxford Bulletin of Economics and Statistics*, 72(5), 600-620.

Lütkepohl, H. (1984). Forecasting Contemporaneously Aggregated Vector ARMA Processes. *Journal of Business & Economic Statistics*, 2(3), 201-214.

Marcellino, M. (1999). Some Consequences of Temporal Aggregation in Empirical Analysis. *Journal of Business & Economic Statistics*, 17(1), 129-136.

Marcellino, M., & Schumacher, C. (2010). Factor MIDAS for Nowcasting and Forecasting With Ragged–Edge Data: A Model Comparison for German GDP. *Oxford Bulletin of Economics and Statistics, 72*(4), 518-550.

Miller, J. I. (2014). Mixed-Frequency Co-Integrating Regressions with Parsimonious Distributed Lag Structures. *Journal of Financial Econometrics*, 12(3), 584-614.

Miller, J. I. (2016). Conditionally Efficient Estimation of Long-Run Relationships Using Mixed-Frequency Time Series. *Econometric Reviews*, 35(6), 1142-1171.

Miller, J. I. (2019). Testing Co-Integrating Relationships Using Irregular and Non–Contemporaneous Series with an Application to Paleoclimate Data. *Journal of Time Series Analysis*, 40(6), 936-950.

Pettenuzzo, D., Timmermann, A., & Valkanov, R. (2016). A MIDAS Approach to Modeling First and Second Moment Dynamics. *Journal of Econometrics*, 193(2), 315-334.

Qian, H. (2016). A Computationally Efficient Method for Vector Auto-Regression with Mixed Frequency Data. *Journal of Econometrics*, 193(2), 433-437.

Rodriguez, A., & Puggioni, G. (2010). Mixed Frequency Models: Bayesian Approaches to Estimation and Prediction. *International Journal of Forecasting*, 26(2), 293-311.

Schorfheide, F., & Song, D. (2015). Real-Time Forecasting with a Mixed-Frequency VAR. *Journal of Business & Economic Statistics*, 33(3), 366-380.

Vahid, F., & Engle, R. F. (1993). Common Trends and Common Cycles. *Journal of Applied Econometrics*, 8(4), 341-360.

Zadrozny, P. A. (2016). Extended Yule–Walker Identification of VARMA Models With Single-or Mixed-Frequency Data. *Journal of Econometrics*, 193(2), 438-446.